## 基础课18 导数与函数的极值、最值

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 考点考向 | 课标要求 | 真题印证 | 考频热度 | 核心素养 |
| 导数与函数的极值、最值 | 掌握 | 2023年新高考Ⅰ卷  2023年新高考Ⅱ卷  2022年全国甲卷（理）  2022年全国乙卷（文） | ★★★ | 数学运算  直观想象  逻辑推理 |
| 命题分析预测 | 从近几年高考的情况来看，导数与函数的极值与最值是高考常考内容，试题难度中等及以上.预计2025年高考命题情况变化不大 | | | |

### 基础知识·诊断

#### 夯实基础

##### 一、函数的极值与导数

一般情况下,在极值点*x*0处,函数*y=f*(*x*)的导数*f'*(*x*)*=*0,可通过如下步骤求出函数*y=f*(*x*)的极值点:

1*.*求出导数*f'*(*x*)*.*

2*.*解方程*f'*(*x*)*=*0*.*

3*.*对于方程*f'*(*x*)*=*0的每一个实数根*x*0,分析*f'*(*x*)在*x*0附近的符号(即*f*(*x*)的单调性),确定极值点:

(1)若*f'*(*x*)在*x*0附近的符号“①左正右负”,则*x*0为②极大值点;

(2)若*f'*(*x*)在*x*0附近的符号“③左负右正”,则*x*0为④极小值点;

(3)若*f'*(*x*)在*x*0附近的符号相同,则*x*0不是极值点*.*

4*.*极小值点、极大值点统称为⑤极值点,极小值和极大值统称为⑥极值*.*

【提醒】1.函数的极值点一定出现在区间的内部，区间的端点不能称为极值点；

2.在函数的整个定义域内，极值不一定是唯一的，有可能有多个极大值或极小值；

3.极大值与极小值之间无确定的大小关系.

##### 二、函数的最大（小）值

1.函数在区间上有最值的条件

如果在区间上函数的图象是一条⑦连续不断的曲线，那么它必有最大值和最小值.

2.求在区间上的最大（小）值的步骤

（1）求函数在区间上的⑧极值；

（2）将函数的各极值与端点处的函数值⑨，比较，其中最大的一个是最大值，最小的一个是最小值.

###### 知识 拓展

1.与是的极值点的关系

若函数可导，则是为的极值点的必要不充分条件.例如，,,但不是极值点.

2.极大值（或极小值）可能不止一个，也可能没有，极大值不一定大于极小值.

3.极值与最值的关系

极值只能在定义域内（不包括端点）取得，最值却可以在端点处取得；有极值的不一定有最值，有最值的也未必有极值；极值有可能成为最值，非常数可导函数的最值只要不在端点取得，则必定在极值点处取得.

4.若函数在闭区间内是单调函数，则一定在区间端点处取得最值；若函数在开区间内只有一个极值点，则相应的极值点一定是函数的最值点.

5.函数最值是“整体”概念，而函数极值是“局部”概念，极大值与极小值之间没有必然的大小关系.

#### 诊断自测

##### 题组1 走出误区

1. 判一判.（对的打“√”,错的打“×”）

（1） 函数在区间上不存在最值.( × )

（2） 函数的极小值一定是函数的最小值.( × )

（3） 函数的极小值一定不是函数的最大值.( √ )

（4） 函数的零点是函数的极值点.( × )

2. （易错题）已知函数在处取得极值0，则512.

**【易错点】**忽视极大值点与极小值点的区别，忽视验证处函数两侧的单调性.

[解析]因为在处有极值0，且，所以即解得或 当，时，，所以在上为增函数，无极值，故舍去. 当，时，，当时，为减函数；当时，为增函数. 故在处取得极小值，所以，.故.

##### 题组2 走进教材

3. （人教A版选修（2）改编）函数在上的最小值为.

[解析]因为，

所以，

令，得，

令，得，

故在上单调递减，故在上的最小值为.

4. （人教A版选修改编）若函数有极值，则实数的取值范围是.

[解析]，由题意知有变号零点，所以，解得或，故实数的取值范围是.

##### 题组3 走向高考

5. [2023·新高考Ⅱ卷]（多选题）若函数既有极大值又有极小值，则( BCD ).

A. B. C. D.

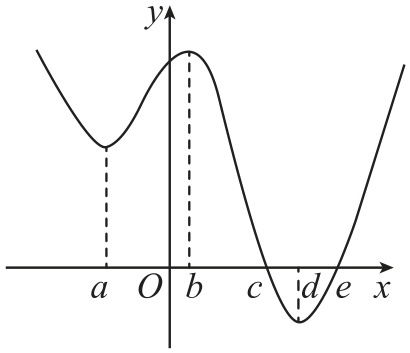
[解析]因为，所以，因为函数既有极大值又有极小值，所以函数在上有两个变号零点，且，所以方程有两个不等的正根,，则即，即.故选.

### 考点聚焦·突破

#### 考点一 利用导数研究函数的极值［多维探究］

##### 根据导数图象判断极值角度1

典例1 [2024·河南质检]已知定义在上的函数，其导函数的大致图象如图所示，则下列叙述正确的是( A ).



；

②函数在处取得极小值，在处取得极大值；

③函数在处取得极大值，在处取得极小值；

④函数的最小值为.

A. ③ B. ①② C. ③④ D. ④

[解析]由的图象可得，当时，,单调递增；当时，,单调递减；当时，,单调递增.

由题意可得，所以①不正确.

由题意得函数在处取得极大值，在处取得极小值，故②不正确，③正确.

,故④不正确.故选.



**导函数图象的应用策略**

1.由的图象与轴有交点，可知函数可能有极值点；

2.由导函数的图象可得的值的正、负，即得函数的单调性，进而研究函数的极值、最值.

##### 求函数的极值、极值点个数角度2

典例2 已知函数.

（1）当时，求的极值；

（2）讨论函数在定义域内的极值点的个数.

[解析]（1）当时，，

函数的定义域为且，

令，得，于是当变化时，，的变化情况如表所示.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | 2 |  |
|  |  | 0 | - |
|  |  |  |  |

故在定义域上的极大值为，无极小值.

（2）函数的定义域为，，

当时，在上恒成立，

即函数在上单调递增，此时函数在定义域上无极值点；

当时，若，则，

若，则，所以函数在处有极大值.

综上可知，当时，函数无极值点；

当时，函数有一个极大值点，且为.



**求函数的极值或极值点的步骤**

1.求，不要忘记函数的定义域；

2.求方程的根；

3.检查在方程的根的左右两侧的符号，确定极值点或函数的极值.

##### 由函数的极值（极值点）求参数的取值范围角度3

典例3 （1）已知函数在处取得极大值，则实数的取值范围为.

（2）若函数存在极值，则实数的取值范围是.

[解析]（1）因为函数，

所以，

当时，由，可得或，由，可得，函数在处取得极大值；

当时，恒成立，函数不存在极值；

当时，由，可得或，由，可得，函数在处取得极小值.

故的取值范围为.

（2）函数的定义域为，且.

由题意可知，函数在定义域上存在极值点，

由可得，令，则.

原问题等价于该方程在上有解，则对于二次方程，即，，解得.

因此实数的取值范围是.

变式设问 若函数在上无极值点，则实数的取值范围是.

[解析]若在上无极值点，则在上单调，即或恒成立.

当时，，显然不满足题意；

当时，，则或恒成立的充要条件是，即，解得.

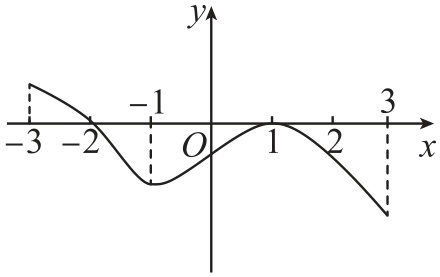
故实数的取值范围是.

**已知函数极值点或极值求参数的两个关键点**

|  |  |
| --- | --- |
| 列式 | 根据极值点处导数为0和极值这两个条件列方程组，利用待定系数法求解 |
| 验证 | 因为导数值等于零不是此点为极值点的充要条件，所以利用待定系数法求解后必须验证根的合理性 |

##### 多维训练

1. [2024·北京质检]已知函数的导函数的大致图象如图所示，则下列结论正确的是( D ).



A. 曲线在点处的切线斜率小于零

B. 函数在区间上单调递增

C. 函数在处取得极大值

D. 函数在区间内最多有两个零点

[解析]根据的图象可知，故的图象在点处的切线斜率等于零，故错误；在上，故在区间上单调递减，故错误；在的左、右两侧，故不是极值点，故错误;在上单调递增，在上单调递减，故在区间内最多有两个零点，故正确.故选.

2. （改编）已知函数.

（1）当时，求函数的极值；

（2）若在其定义域内有两个不同的极值点，求实数的取值范围.

[解析]（1）当时，，则，

令，解得.

当时，，此时单调递减；

当时，，此时单调递增.

故函数在处取得极小值，极小值为.

（2）由题意知，函数的定义域为，，

则方程在上有两个不同的根，

即方程在上有两个不同的根，

即方程在上有两个不同的根，

令，，则，

则当时，，当时，，

则函数在上单调递增，在上单调递减，

所以，

因为，当时，，当时，，当 时，，

所以实数的取值范围为,.

#### 考点二 利用导数研究函数的最值［师生共研］

典例4 函数,的最大值为( B ).

A. B. C. D.

[解析]由，

得，

当时，，当时，，

所以函数在上单调递减，在上单调递增，

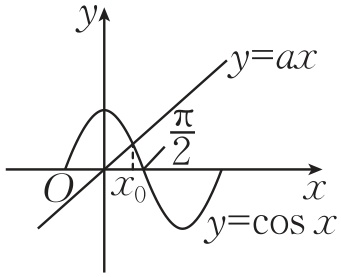
因为，所以函数,的最大值为.故选.

变式设问 已知函数，若在,上有最小值，则实数的取值范围是.

[解析].

若，则当时，，则在上单调递减，此时函数在上没有最小值，不符合题意;

若，令，即，转化为求直线与图象的交点的横坐标，



画出函数与的大致图象，如图所示，

存在，使得，

当时，，单调递减，

当时，，单调递增，

此时函数在上有最小值，符合题意.

综上，实数的取值范围是.



**求函数在上的最值的方法**

1.若函数在区间上单调递增或递减，则与一个为最大值，一个为最小值；

2.若函数在区间内有极值，则要先求出上的极值，再与，比较，最大的是最大值，最小的是最小值，可列表完成；

3.若函数在区间上有唯一极值点，则这个极值点就是最大（或最小）值点，此结论在导数的实际应用中经常用到.

##### 针对训练

已知函数.

（1） 若，求在区间上的最大值；

[解析]因为，所以，则，

因为，所以，则在区间上单调递增，

故.

（2） 求在区间上的最小值.

[解析]的定义域为，.

当，即时，在上单调递增，则；

当，即时，在上单调递减，在上单调递增，则；

当，即时，在上单调递减，则.

综上，

### 拓展教材 深度学习

**泰勒公式及其推广**

泰勒公式是一种将函数展开为幂级数的方法，它将一些复杂的函数近似地表示为简单的多项式函数.泰勒公式这种化繁为简的功能，使得它成为分析和研究许多数学问题的有力工具.

1.几个常见的泰勒公式如下：

（1）+…；

（2） ；

（3）；

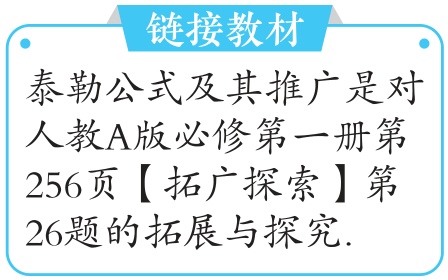
（4）-…,-…,+….

2.泰勒公式的推广（切线、曲线放缩） 我们在上面的泰勒公式中将右侧保留到一次项或二次项，其余全部丢掉，就可以得到常用的切线放缩不等式.

（1）指数放缩 ，由此推广为，，，，等.

（2）对数放缩 ,由此推广为，，，等.

（3）三角放缩对于恒成立,对于恒成立,对于恒成立.



典例 若，证明下列不等式：

（1）；

（2）；

（3）；

（4）.

[解析]（1）令,，则,

因为,所以，即，所以在上单调递增，所以，即，证毕.

（2）由（1）可知,两边同时取对数可得,

即，证毕.

（3）令,，且，

则，因为，所以，

即，所以在上单调递增，

所以，

即. ①

，令，

则，

由①式可知，所以在上单调递增，所以，即，所以在上单调递增，所以，即. ②

综合①②可知，，证毕.

（4）略（参考（3）的证明即可）

深度训练1 [2021·新高考 Ⅰ 卷]设，，，则( B ).

A. B. C. D.

[解析]根据泰勒展开式，

，

所以，

，

易知,

故，

比较近似表达式容易发现.故选.

深度训练2 [2022·新高考Ⅰ卷]设,，，则( C ).

A. B. C. D.

[解析]由指数的切线放缩可知不等式，

所以，

即，所以，故.

由对数的切线放缩得，即，

所以，故.

由切线放缩得不等式，所以，故.综上，.故选.

深度训练3 [2022·全国甲卷]已知,,，则( A ).

A. B. C. D.

[解析]因为当时,，

所以，故，所以；

当时,，取，得，故.故.故选.